

文章编号: 1000-7598 (2009) 06-1649-05

对经典小变形固结理论固结系数的辨析

袁大军¹, 丁洲祥¹, 朱合华²

(1. 北京交通大学 土木建筑工程学院; 北京 100044; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 针对经典固结理论中固结系数的两种不同定义, 探讨了其根源和潜在影响。对体元体积变化率的计算方法不同是导致产生两种小变形固结系数的主要原因。根据有限变形理论分析, Terzaghi(1943)和 Terzaghi & Fröhlich (1936)提出的小变形固结系数分别具有拉格朗日坐标和欧拉坐标的背景, 均不同于 Terzaghi(1923)最早得到的形式。在 Gibson 大变形理论研究中涉及的小变形固结系数是按 Terzaghi & Fröhlich 定义的, 在此前提下所得的大、小变形法结果差异的定量结果可能具有一定局限性。从应用角度看, 两种固结系数之间的差别与荷载大小和土体的结构性等因素有关。

关键词: 经典固结理论; 固结系数; Gibson 大变形理论

中图分类号: TU 411

文献标识码: A

Analysis of consolidation coefficients in classic small-strain consolidation theory

YUAN Da-jun¹, DING Zhou-xiang¹, ZHU He-hua²

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The origin and the potential influence of two forms of consolidation coefficients in classic consolidation theory are discussed. Various computational methods for change rate of volume element are a major reason for resulting in two kinds of consolidation coefficients. According to finite-strain theory, the small-strain consolidation coefficients proposed by Terzaghi (1943) and Terzaghi & Fröhlich (1936) which differ from that obtained earlier by Terzaghi (1923), have Lagrangian coordinate and Eulerian coordinate backgrounds respectively. The small-strain consolidation coefficient in Gibson's large-strain consolidation theory generally uses the definition proposed by Terzaghi & Fröhlich (1936), leading to a considerable controversy on quantitative results obtained previously with respect to the differences between Gibson's theory and classic consolidation theory. From the application point, the differences between two kinds of consolidation coefficients in classic theory depend on stress level, structure characteristics of soils and so on.

Key words: classic consolidation theory; consolidation coefficient; Gibson's large-strain consolidation theory

1 引言

固结理论在研究地基土体的渗流和变形机理等方面有重要影响。在经典的 Terzaghi 小变形固结理论^[1]研究中, 通常认为小变形法固结系数定义为

$$c_v = \frac{k(1+e_0)}{\gamma_w a_v} \quad (1)$$

式中: c_v 是小变形法固结系数; k 是渗透系数; e_0 是初始孔隙比; a_v 是压缩系数; γ_w 是水的重度。

然而, 在固结理论的其它研究中, 对小变形固结系数还出现了另外一种不同的理解, 即

$$c'_v = \frac{k(1+e)}{\gamma_w a_v} \quad (2)$$

式中: c'_v 是小变形固结系数的另一形式; e 为土体孔隙比, 不同于 e_0 。

上述两种小变形固结系数曾先后出现在著名的 Gibson 大变形理论^[2-3]研究中。其中, Gibson et al. 给出其理论中大变形固结系数的物质坐标表述形式^[2]

收稿日期: 2008-12-19

基金项目: 国家自然科学基金青年基金 (No. 50708077); 北京交通大学科技基金 (No. 2008RC025); 中国博士后科学基金 (No. 20060400177)。

第一作者简介: 袁大军, 男, 1961 年生, 博士, 主要从事岩土与地下工程等方面的教学和科研工作。E-mail: yuandj603@163.com

$$c_F = -\frac{k(1+e_0)^2}{\gamma_w(1+e)} \frac{d\sigma'}{de} \quad (3)$$

式中： c_F 是基于物质坐标的 Gibson 大变形固结系数； σ' 是有效应力。 c_F 与小变形固结系数之间的关系为^[2]

$$c_F = (1+e_0)c_v/(1+e) \quad (4)$$

由此可以看出，式(4)的小变形固结系数是按式(1)定义的。但是，Gibson et al. (1981)后来又给出该理论中大变形固结系数的固相体积坐标形式及其与小变形固结系数之间的关系^[3]

$$g = -\frac{k}{\gamma_w(1+e)} \frac{d\sigma'}{de} \quad (5)$$

$$g = c_v/(1+e)^2 \quad (6)$$

上两式中 g 是基于固相体积坐标的 Gibson 大变形固结系数。而式(6)中的 c_v 本质上是按式(2)定义的，它与式(4)中的记法相同，但含义却迥异。为避免混淆，式(6)中的 c_v 在这里不妨改记为 c'_v 。

近年来的大变形理论研究^[4-5]中，对大、小变形固结系数的关系，仍然主要采用式(6)的形式。其中隐含使用的小变形固结系数 c'_v 既然不同于常用的 c_v ，那么在此前提下得到的关于大、小变形法计算结果差异的各种结论，必然带有一定的局限性。因此，开展经典固结理论中固结系数的研究，除了对合理计算小变形固结系数有重要的实际意义以外，还具有更深层面的理论意义。

通过对经典固结理论的深入分析^[6]，人们重新认识到，Terzaghi (1923) 提出的固结模型并非通常认为的小变形模型，而是基于固相体积坐标的线性大变形模型，只不过忽略了土体自重，并且在固结系数定义式里面省略了式(5)右端项中水的重度 γ_w 。后来开始出现的经典小变形固结模型其实是 Terzaghi & Fröhlich (1936) 提出，其中固结系数按式(2)给出^[6]。但是，文献[6]并没有提及 Terzaghi (1943) 在重新表述其小变形固结模型时得到的式(1)所示的固结系数形式，而这一形式在工程实践中似乎更为常用。

自 Terzaghi (1943) 之后的国内外若干土力学著作^[7-20]也分别对经典固结理论模型进行推导，并得到相应的小变形固结系数，这基本都可归属为 c_v 和 c'_v 两种情况。但是，目前还鲜有文献对上述两类小变形固结系数的根源及其潜在影响进行深入分析。

因此，本文将尝试探讨这一问题，从有限变形理论角度剖析，并通过实例分析，验证其研究意义。

2 两类小变形固结系数的根源探讨

从力学模型的角度看，固结系数源自固结控制方程，而后者在物理机理上揭示了渗流速度场的散度与固相速度场的散度(土体体积变化率)之和为 0 这一规律，即质量守恒定律。通过对以往文献[1, 7-20]成果的分析可见，人们对如何确定渗流速度场的散度这一问题异议很少，而对体元体积变化率的计算则存在较大差异，本文认为这是导致产生两类小变形固结系数的主要原因之一。

对体元体积变化率的计算方法主要可以概括为两大类。其中，第一类算法不妨以文献[18-19]等为代表，体元体积变化率为

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e}{1+e_0} dx dy dz \right) = \frac{dx dy dz}{1+e_0} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (7)$$

式中： V 表示体元体积； dx ， dy 和 dz 为三个方向的坐标微元。这种方法隐含着体元体积 $dx dy dz$ 为常数的假设。

体元体积变化率的第二类算法可以文献^[12, 13, 21]等为代表，表示为

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V_s \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{dx dy dz}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (8)$$

式中： V_s 是体元中固相体积，为不变量； V_s 与 V 的关系为 $V = V_s(1+e) = dx dy dz$ 。因此，该法隐含了体元体积 $dx dy dz$ 为变量的假设。

分别运用式(7)和(8)，再结合 Darcy 定律、本构关系和有效应力方程等，最终可以得到小变形固结控制方程，以及对应的两类小变形固结系数式(1)和(2)。

大体上看，文献[7-14]等得到的小变形固结系数形式为 c'_v ；而文献[1, 15-20]等导出的小变形固结系数形式是 c_v 。个别文献没有明确指出其中使用的 e 究竟是指初始孔隙比还是孔隙比，这里不作深究。

可以看出，区分 c_v 和 c'_v 对实际应用具有重要意义。文献[9]认为，实际上土性参数 k ， a_v 和 e 都随有效应力的增加而变化，简化起见常取室内试验中土样固结前后的平均值。从这种平均取值的意义看，按 c_v 定义的固结系数，仅涉及到土性参数 k 和 a_v ，这与 c'_v 明显不同。

值得一提的是，Terzaghi (1943) 在推导其固结模型^[1]过程中，存在疏忽，即将孔隙率 n 误用作 n_{10} ，

$n_{10} = e/(1+e_0)$ 。幸运的是, 这种不一致并没有影响固结模型的最终表述结果。

3 固结系数的有限变形理论分析

通过前面分析, 两类小变形固结系数与建模过程中潜在使用的体元性质有关, 两者似乎都有其合理性。但是, 要深入分析 c_v 和 c'_v 之间的内在联系, 仅仅在小变形范畴内进行讨论却很困难。考虑到小变形问题在理论上是大变形的特例, 这里尝试采用有限变形理论予以探讨。

根据有限变形理论, 考察物体的运动变形可以采用两类参考构形: 初始构形和现时构形。前者一般采用拉格朗日坐标, 而后者一般采用欧拉坐标。下面的分析将先从土体瞬时体积变化率的表述方法着手, 由此再探讨体元体积变化率这一主要问题。

根据有限变形理论中变形率张量的定义

$$\boldsymbol{\Theta}_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{si}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \mathbf{v}_{sj}}{\partial \xi_i} \right) \quad (9)$$

式中: $\boldsymbol{\Theta}_{ij}$ 是变形率张量; $\mathbf{v}_{si}$ 是土体固相速度; ξ_i 是欧拉坐标; 其中右端前面的符号是考虑到土力学表述习惯而加的。在一维情况下, $\boldsymbol{\Theta}_{11}$ 就表示土体的瞬时体积变化率。

根据变形率张量 $\boldsymbol{\Theta}_{ij}$ 与 Almansi 应变张量 ζ_{pq} 的物质导数 $\dot{\zeta}_{pq}$ 的关系

$$\dot{\zeta}_{pq} = V_{pq} - e_{kq} \frac{\partial v_{sk}}{\partial \xi_p} - e_{kp} \frac{\partial v_{sk}}{\partial \xi_q} \quad (10)$$

以及土力学表述习惯, 可以得到一维情况下

$$\boldsymbol{\Theta}_{11} = \dot{\zeta}_{11} / (1 + 2\zeta_{11}) \quad (11)$$

再结合一维 Almansi 应变 ζ_{11} 与孔隙比的关系

$$\zeta_{11} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+e_0}{1+e} \right)^2 - 1 \right] \quad (12)$$

最后就求出土体一维瞬时体积变化率与孔隙比之间的理论关系

$$\boldsymbol{\Theta}_{11} = -\frac{\dot{e}}{1+e} \quad (13)$$

式中: $\dot{e}$ 是关于孔隙比的物质导数。

在此基础上, 可以建立欧拉描述情况下, 体元体积 V 的物质时间变化率

$$\frac{DV}{Dt} = \int (-\boldsymbol{\Theta}_{11}) d\omega = \int \frac{\dot{e}}{1+e} d\omega \quad (14)$$

式中积分微元 $d\omega$ 按欧拉坐标定义, 与其相应的按

拉格朗日坐标定义的积分微元不妨记为 $d\Omega$ 。

根据有限变形理论的微元体积变换公式

$$d\omega/d\Omega = (1+e)/(1+e_0) \quad (15)$$

可以得到式(14)对应的拉格朗日坐标形式为

$$\frac{DV}{Dt} = \int \frac{\dot{e}}{1+e_0} d\Omega \quad (16)$$

由于体元在宏观上无限小, 因此可以将式(14)和(16)中的积分项移到积分号外面。进一步结合渗流速度场散度等条件, 就可以分别得到相应的固结系数。其中, 基于式(14)得到的固结系数在形式上与式(2)相同。文献[22]也曾导出类似结果。因此, 小变形固结系数 c'_v 实质上具有欧拉描述的大变形固结系数的含义, 其推导过程中体元为变量的原因是使用了欧拉坐标。而通过对比式(16)和(7)可见, 小变形分析式(7)中的体元具有拉格朗日体元的属性, 其隐含使用的坐标不是固相体积坐标而是拉格朗日坐标。由此看来, 两类小变形固结系数的出现主要是由于在体元体积变化率的表征上不同研究者分别使用了不同的参考构形和坐标体系。只有当土体变形无限小 ($e \approx e_0$) 时, 这些方法之间的差别才趋于消失, c'_v 也将退化为 c_v 的形式。

3 实例分析与讨论

3.1 吹填土自重固结分析

在 Gibson 大变形固结理论与经典小变形固结理论预测结果的对比研究中, 通常使用小变形固结系数 c'_v 而不是常用的 c_v 。下面将通过算例分析, 探讨 c'_v 和 c_v 的不同选择对大、小变形理论结果差异的影响。

采用文献[10]大面积吹填土自重固结算例: 单面排水, 一次吹填厚度 10 m, 初始孔隙比 e_0 为 8.0, 土粒密度 2.74 g/cm³, 大变形固结系数 $g = 1 \times 10^{-4}$ cm²/s, 压缩本构关系为 $e = (e_0 - e_\infty) e^{-\lambda \sigma'} + e_\infty$, 其中, e_∞ 为 2.0, λ 为 0.0727。比较对象为固结度达 80 % 时, 大、小变形法所预测的时间差异。

文献[10]求得大、小变形法预测的结果分别为 570 d 和 1 481 d, 后者是前者的 2.6 倍。其中在确定小变形固结系数时采用了关系式(6), $c'_v = 4.86 \times 10^{-2}$ m²/d。

根据式(1)和(5), 不难得到小变形固结系数 c_v 与 g 的关系为

$$c_v = (1+e_0)(1+e)g \quad (17)$$

为便于对比, 参考文献[10]的处理方法, 即将式(17)

中的 e 取土层中间部位的初始孔隙比和最终孔隙比的平均值 $\bar{e}$, $\bar{e} = 6.5$ 。于是 $c_v = 5.83 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{d}$ 。 $c_v / c'_v = 1.2$, 说明 c_v 明显地大于 c'_v 。

由于自重荷载是三角形分布荷载, 查文献[9], 可得固结度为 80 % 时的时间因素 T_v 为 0.665。因此, 按经典理论达 80 % 固结度所需时间为

$$t = T_v h^2 / c_v = 0.665 \times 10^2 / (5.83 \times 10^{-2}) = 1140 \text{ d} \quad (18)$$

这样, 小变形法预测结果是大变形法结果的 2.0 倍, 不同于文献[10]所得的 2.6 倍结果。

综上所述, 小变形固结系数的两种不同定义对于大、小变形理论结果的差异有较大影响, 以往对大变形法固结发展快于小变形法结果的预测结果被高估, 值得引起注意。

3.2 公路软基固结试验结果分析

下面结合四川达渝高速公路低液限粘土路基的固结试验资料^[23], 简要讨论小变形固结系数的不同定义在实际应用中可能产生的差异。

原状土和重塑土的固结试验结果如表 1 所示。其中, 两者的初始孔隙比分别为 0.597 和 0.910。表中小变形固结系数 c_v 引自文献[23]的结果, 而 c'_v 是本文按式(2)求得的。可见, 随着荷载水平的提高, 两类固结系数比值 c_v / c'_v 也相应增大。而在荷载水平相同的条件下, 重塑土的 c_v / c'_v 值总是偏大于原状土说明土体的结构性对两类小变形固结系数的比值有明显影响。因此, 重视经典固结理论中固结系数的不同定义并在应用中加以区分, 具有一定的理论意义和工程实际意义。

表 1 固结系数对比表
Table 1 Comparison of consolidation coefficients

σ' / kPa	原状土				重塑土			
	孔隙比 e	$c_v / 10^{-3} (\text{cm}^2/\text{s})$	$c'_v / 10^{-3} (\text{cm}^2/\text{s})$	c_v / c'_v	孔隙比	$c_v / 10^{-3} (\text{cm}^2/\text{s})$	$c'_v / 10^{-3} (\text{cm}^2/\text{s})$	c_v / c'_v
50	0.570	2.19	2.15	1.017	0.808	0.704	0.67	1.056
100	0.552	1.98	1.92	1.029	0.766	0.857	0.79	1.082
200	0.523	2.12	2.02	1.049	0.716	1.18	1.06	1.113
300	0.502	2.35	2.21	1.063	0.690	1.60	1.42	1.130
400	0.487	2.67	2.49	1.074	0.670	2.12	1.85	1.144
500	0.475	2.90	2.68	1.083	0.653	2.44	2.11	1.155
600	0.466	3.17	2.91	1.089	0.640	3.00	2.58	1.165
700	0.457	3.54	3.23	1.096	0.627	3.35	2.85	1.174
800	0.449	3.84	3.48	1.102	0.618	3.65	3.09	1.180

4 结 语

(1) Terzaghi(1943)与 Terzaghi & Fröhlich (1936) 分别提出的小变形固结系数具有不同的含义, 对体元体积变化率的算法不一是产生其差异的一个重要原因。从有限变形理论角度分析, 这两种小变形固结系数源于不同的参考构形和坐标体系, 它们分别具有拉格朗日坐标和欧拉坐标的背景, 不同于 Terzaghi(1923)最早提出的固结系数基于固相体积坐标的情况。

(2) 关于 Gibson 大变形理论与经典理论结果差异的若干已有结论, 隐含了其中的小变形固结系数采用 Terzaghi & Fröhlich (1936)所提形式这一前提条件。如果其中的小变形固结系数取 Terzaghi(1943)的常用式, 则将影响已有的定量分析结果, 但是否会影响既往结论的定性性质, 值得深入研究。

(3) 两种小变形固结系数之间的偏差程度与荷载水平和地基土体的结构性等因素有关, 有必要进一步结合工程实践加以探讨和细化分析。

参 考 文 献

- [1] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1943.
- [2] GIBSON R E, ENGLAND G L, HUSSEY M J L. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays I: Finite non-linear consolidation of thin homogeneous layers [J]. *Geotechnique*, 1967, 17(3): 261—273.
- [3] GIBSON R E, SCHIFFMAN R L, CARGILL K W. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays II: Finite nonlinear consolidation of thick homogeneous layers[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1981, 18(2): 280—293.
- [4] MORRIS P H. Analytical solutions of linear finite-strain one-dimensional consolidation [J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2002, 128(4): 319—326.

- [5] MORRIS P H. Analytical solutions of linear finite-and small-strain one-dimensional consolidation[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2005, 29: 127—140.
- [6] ZNIDARCIC D, SCHIFFMAN R L. On Terzaghi's concept of consolidation [J]. **Geotechnique**, 1980, 32(4): 387—389.
- [7] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 北京: 水利电力出版社, 1983.
- [8] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [9] 洪毓康. 土质学与土力学(第二版)[M]. 北京: 人民交通出版社, 1995.
- [10] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算(第二版)[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996.
- [11] 殷宗泽. 土力学与地基[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1999.
- [12] BOWLES J E. Physical and geotechnical properties of soils[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [13] DAS B M. Advanced soil mechanics[M]. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1983.
- [14] LAMBE T W, WHITMAN R V. Soil Mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [15] 钱家欢. 土力学[M]. 南京: 河海大学出版社, 1988.
- [16] 陈仲颐, 周景星, 王洪瑾. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994.
- [17] 陈希哲. 土力学地基基础(第四版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [18] 龚晓南. 高等土力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1996.
- [19] SCHOFIELD A, WROTH P. Critical state mechanics[M]. Europe: McGraw-Hill Education, 1968.
- [20] CHEN W F, LIEW J Y R. The civil engineering handbook(2nd edition)[M]. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [21] PUNMIA B C, JAIN A K. Soil mechanics and foundations (16th edition)[M]. New Delhi: Laxmi Publications, 2005.
- [22] 谢永利. 大变形固结理论及其有限元分析[D]. 杭州: 浙江大学, 1994.
- [23] 李又云. 同时考虑加荷、变形和时间的公路软基固结沉降理论及仿真的研究[硕士学位论文 D]. 西安: 西安公路交通大学, 2000.